Analiz III (A-B) 1. Quiz Yanıt Anahtarı

1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan x}{\sqrt{x^{5/2}+x}}\,dx$ has olmayan integralinin karakterini belirleyiniz.

Çözüm: $$\int_0^\infty \frac{\arctan x}{\sqrt{x^{5/2}+x}}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{\arctan x}{\sqrt{x^{5/2}+x}}\,dx}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\arctan x}{\sqrt{x^{5/2}+x}}\,dx}_{\mathrm{II}}$$

I. integral 2. tip has olmayan integraldir. $\forall x \in (0,1]$ için

$$0 < \frac{\arctan x}{\sqrt{x^{5/2}+x}} \leq \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^{5/2}+x}} < \frac{\pi}{4}\,\frac{1}{\sqrt{x}}$$

ve $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ integrali $p=\frac{1}{2}<1$ olduğundan yakınsaktır. O halde karşılaştırma testi gereği I integrali de yakınsaktır.

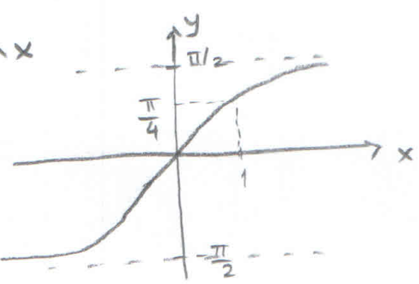
II. integral 1. tip has olmayan integraldir. $\forall x \in [1,\infty)$ için

$$0 < \frac{\arctan x}{\sqrt{x^{5/2}+x}} < \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^{5/2}+x}} < \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^{5/2}}} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x^{5/4}}$$ olur.

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{5/4}}\,dx$ integrali $p=\frac{5}{4}>1$ olduğundan yakınsaktır. O halde karşılaştırma testi gereği II integrali de yakınsaktır.

Sonuç olarak I ve II integralleri yakınsak olduğundan $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan x}{\sqrt{x^{5/2}+x}}\,dx$ has olmayan integrali yakınsaktır.

$y = \arctan x$



$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ serisinin toplamını bulunuz.

$$a_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{16}\right)+\cdots+$$

$$+\left(\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{n^2}\right)+\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1-\frac{1}{(n+1)^2}$$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1$ olduğundan verilen seri yakınsak

olup, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1$ bulunur.